

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا

شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

مذكرة رقم 14 في درس حساب الاحتمالات

القدرات المنتظرة

- حساب احتمال اتحاد حدثين
- حساب احتمال تقاطع حدثين
- حساب احتمال الحدث المضاد لحدث
- التعرف على استقلالية حدثين
- تحديد قانون احتمال متير عشوائي والتعرف على القانون الحداني وتطبيقه في وضعيات من مواد التخصص

القدرات المنتظرة

- المبدأ الأساسي للتعداد
- الترتيبات - التبديلات - التآليفات
- تجربة عشوائية- مصطلحات:
- استقرار تردد حدث_ و فرضية تساوي الاحتمالات واحتمال حدث:
- أنواع السحب
- الاحتمال الشرطي:
- استقلالية اختبارين و الاختبارات المتكررة:
- المتغيرات العشوائية- قانون احتمال متغير عشوائي:
- القانون الحداني:

$$\text{card}(\Omega) = 2 \times 2 = 4 \quad \text{مبدأ الجداء}$$

تمرين 1: أو نشاط 3: نرمي قطعة نقدية ثلاث مرات متتالية

أرسم شجرة الامكانيات

حدد كون الامكانيات Ω وحدد $\text{card}(\Omega)$

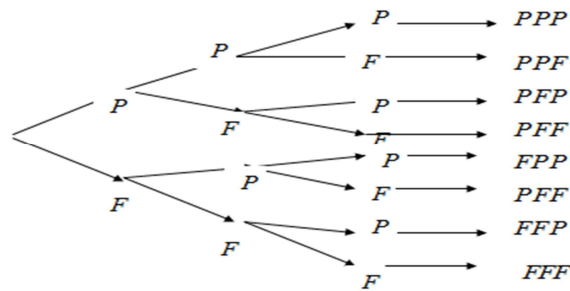
الأجوبة: هذه التجربة لا يمكن توقع نتيحتها مسبقا وبشكل أكيد ومنه هي تجربة عشوائية

ماهي نتائج هذه التجربة ؟

يمكن الحصول على: PPP أو FFF أو

PPP هي امكانية و FFF هي امكانية أخرى و

1) حدد كل الامكانيات وعددها: يمكن لنا استعمال شجرة الامكانيات



2) اذن لهذه التجربة 8 امكانيات فقط اذن فضاء الامكانيات هو :

$$\Omega = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP; FFF\}$$

I. المبدأ الأساسي للتعداد:

نشاط 1: نذكر أن لقطعة نقدية وجهين P و F

نرمي قطعة نقدية مرة واحدة

ماهي نتائج هذه التجربة؟ يمكن الحصول على P أو F هي امكانية و F هي امكانية أخرى

اذن لهذه التجربة إكمانيتين فقط اذن مجموعة الامكانيات هي :

$$\Omega = \{P; F\}$$

والكتابة : $\text{card}(\Omega) = 2$ (إكمانيتين فقط) تقرأ رئيسي المجموعة Ω

نشاط 2: نرمي قطعة نقدية مرتين متتاليتين

ماهي نتائج هذه التجربة؟ يمكن الحصول على PP أو FF أو FP أو PF اذن: PP هي امكانية و FF هي امكانية أخرى اذن لهذه التجربة 4 امكانيات فقط اذن مجموعة الامكانيات هي :

$$\Omega = \{PP; FF; PF; FP\}$$

ولدينا : $\text{card}(\Omega) = 4$ (4 امكانيات فقط)

يمكن لنا استعمال شجرة الامكانيات للبحث عن كل الامكانيات

الرمية الأولى	الرمية الثانية
2	2

(3) $card(\Omega) = 8$ (8 امكانيات فقط)

الرمية الأولى	الرمية الثانية	الرمية الثالثة
2	2	2

المبدأ: لتكن E تجربة تتطلب نتائجها اختبارين.

إذا كان الاختيار الأول يتم بـ n_1 طريقة مختلفة، و الاختيار الثاني يتم بـ n_2 طريقة مختلفة. فان عدد النتائج الممكنة هو الجداء: $n_1 \times n_2$.

تمرين 2: تعتبر الأرقام التالية: 1 و 3 و 5

حدد عدد الأعداد المكونة من رقمين الذي يمكن تكوينه باستعمال الأرقام السابقة فقط

الجواب: رقم الوحدات يمكن اختياره بـ ثلاث كيفيات مختلفة كذلك رقم العشرات

رقم الوحدات	رقم العشرات
3	3

وحسب المبدأ الأساسي للتعاد فان عدد الأعداد المكونة من رقمين الذي يمكن تكوينه

هو: $card(\Omega) = 3 \times 3 = 9$

I. الترتيبات - التبديلات - التاليفات:

1. الترتيبات:

نشاط 1: تعتبر الأرقام التالية: 1 و 2 و 6

حدد عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين الذي يمكن تكوينه باستعمال الأرقام السابقة فقط

الجواب: رقم الوحدات يمكن اختياره بـ ثلاث كيفيات مختلفة

لكن رقم العشرات فقط بكيفيتين مختلفتين

رقم الوحدات	رقم العشرات
3	2

وحسب المبدأ الأساسي للتعاد فان عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين الذي يمكن تكوينه

هو: $card(\Omega) = 3 \times 2 = 6$

العدد: 21 عدد يمكن تكوينه ويسمى ترتيبية

العدد: 12 عدد يمكن تكوينه ويسمى ترتيبية

العدد: 61 عدد يمكن تكوينه ويسمى ترتيبية

العدد: 16 عدد يمكن تكوينه ويسمى ترتيبية

كم عدد الترتيبات؟ هناك 6 ترتيبات ممكنة

نرمز لعدد الترتيبات بـ: $A_3^2 = 3 \times (3-1) = 3 \times 2 = 6$

تعريف 1: عدد الترتيبات بدون تكرار لـ p عنصر من بين n

عنصرا، حيث $1 \leq p \leq n$ هو

$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$. نرمز لهذا العدد

بالرمز A_n^p . و لدينا:

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$$

$$A_6^3 \times A_{10}^4 \text{ و } A_7^4 \text{ و } A_5^3 \text{ و } A_4^2$$

$$\text{أمثلة: أحسب: } A_{10}^5$$

$$\text{الجواب: } A_4^2 = 4 \times 3 = 12 \quad A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$$A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{5 \times 4}{1} = 20 \quad \frac{A_6^3 \times A_{10}^4}{A_{10}^5} =$$

تمرين 3: لتشغيل الهاتف المحمول يجب الضغط على الأزرار الأربعة التي تحمل الأرقام المكونة للرقن السري حسب ترتيبها وإلا سيغلق تلقائيا

1. ما عدد الأقفان السرية الممكنة إذا علمت أن الأرقام المكونة لها لا يمكننا تكرارها

2. ما عدد الأقفان السرية الممكنة إذا علمت أن الأرقام المكونة لها لا يمكننا تكرارها وتتكون فقط من الأرقام التالية فقط: 1 و 2 و 3 و 4

الجواب:

$$A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

$$A_4^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

2. التبديلات

نشاط 1: نعتبر الأرقام التالية: 4 و 5 و 6

حدد عدد الأعداد المكونة من ثلاث أرقام مختلفة الذي يمكن تكوينه باستعمال الأرقام السابقة فقط

الجواب: رقم الوحدات يمكن اختياره بـ ثلاث كيفيات مختلفة

لكن رقم العشرات فقط بكيفيتين مختلفتين و رقم المئات بكيفية وحيدة

رقم الوحدات	رقم العشرات	رقم المئات
3	2	1

وحسب المبدأ الأساسي للتعاد فان عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين الذي يمكن تكوينه

هو: $card(\Omega) = 3 \times 2 \times 1 = 6$

العدد: 465 عدد يمكن تكوينه ويسمى تبديلة

العدد: 456 عدد يمكن تكوينه ويسمى تبديلة

العدد: 564 عدد يمكن تكوينه ويسمى تبديلة

العدد: 546 عدد يمكن تكوينه ويسمى تبديلة

كم عدد التبديلات؟ هناك 6 تبديلات ممكنة

نرمز لعدد التبديلات لثلاث أعداد بـ: $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ و يقرأ عاملي 3

تعريف 2: عدد التبديلات لـ n عنصر من بين n هو:

$$A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

نرمز للجداء $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ بالرمز $n!$ ، و

يقرأ: "عاملي n "، و اصطلاحا نضع $0! = 1$.

أمثلة: أحسب: 4! و 5! و 7! و $\frac{10 \times 5!}{6 \times 8!}$

الجواب:

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \quad 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

$$\frac{10 \times 5!}{6 \times 8!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 5!}{6 \times 5 \times 8!} = \frac{10 \times 9}{6} = \frac{10 \times 3 \times 3}{3 \times 2} = \frac{10 \times 3}{2} = 15$$

تمرين 4: ما عدد الكلمات من ستة حروف لها معنى أو لا، و التي يمكن كتابتهما باستعمال جميع حروف الكلمة "المغرب"

تمرين 5: ما عدد الكلمات من أربع حروف لها معنى أو لا، و التي يمكن تكوينها باستعمال الحروف التالية فقط

A و D و I و S

3. التاليفات

نشاط 1: نعتبر المجموعة التالية: $E = \{a; b; c; d\}$

حدد عدد أجزاء المجموعة E التي تحتوي على ثلاث عناصر

الجواب: هو: $card(E) = 4$

الجزء: $A_1 = \{a; b; c\}$ يمكن تكوينه ويسمى تاليفة

العدد: $A_2 = \{a; b; d\}$ عدد يمكن تكوينه ويسمى تاليفة

الجزء: $A_3 = \{b; c; d\}$ يمكن تكوينه ويسمى تاليفة

العدد: $A_4 = \{a; c; d\}$ عدد يمكن تكوينه ويسمى تاليفة

كم عدد التاليفات؟ هناك 4 تبديلات ممكنة

نرمز لعدد التاليفات لثلاث أعداد مختارة من بين 4 ب: $C_4^3 = 4$

تعريف 3: ليكن n عنصرا من \mathbb{N} . و لتكن E مجموعة تحتوي على n عنصر.

كل جزء من E يتكون من p عنصر (حيث $0 \leq p \leq n$) يسمى

تاليفة ل p عنصر من E .

4. خاصيات:

لكل n من \mathbb{N}^* , و لكل p من \mathbb{N} بحيث $0 \leq p \leq n$, لدينا:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (p \neq 0); \quad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_{n+1}^{p+1} \quad \text{و} \quad C_n^p = C_n^{n-p}$$

$$C_n^1 = n \quad \text{و} \quad C_n^{n-1} = n \quad \text{و} \quad C_n^n = 1 \quad \text{و} \quad C_n^0 = 1$$

أمثلة: أحسب: C_7^3 و C_{12}^3 و C_7^4 و C_5^2 و C_4^2 و C_5^3

$$C_5^4 \quad \text{و} \quad C_5^0 \quad \text{و} \quad C_7^7 \quad \text{و} \quad C_{12}^1 \quad \text{و} \quad C_5^3$$

الجواب:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2!} = 6$$

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2!} = 10$$

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} = 35$$

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{9!3!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!3!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3!} = 220$$

$$C_{12}^1 = 12 \quad \text{و} \quad C_5^3 = C_5^2 = 10 \quad \text{و} \quad C_7^3 = C_7^4 = 35$$

$$C_4^5 = 5 \quad \text{و} \quad C_5^0 = 1 \quad \text{و} \quad C_7^7 = 1$$

تمرين 6: لاجتياز امتحان شفوي على كل مترشح أن يجيب على

سؤالين مسحوبين عشوائيا من بين خمس أسئلة مقترحة

سؤال: حدد عدد الإمكانيات

الجواب: $C_5^2 = 10$

تمرين 7: $A = \{6, 7, 1, 0\}$ $E = \left\{2, 5, 6, 7, 1, 0, \frac{3}{4}\right\}$

$$D = \{2\} \quad C = \left\{\frac{3}{4}, 5\right\} \quad B = \left\{\frac{3}{4}, 2, 7, 6, 1\right\}$$

1. تحقق أن A و B و C و D أجزاء من E .

2. حدد: $\bar{A}, A \cup B, A \cap B$

3. حدد عدد أجزاء E التي تحتوي على ثلاث عناصر

4. حدد عدد أجزاء E التي تحتوي على أربع عناصر

تمرين 8: أحسب: C_6^2 و C_8^3 و C_{12}^4 و C_{11}^3 و C_8^5

$$\text{و} \quad C_6^4$$

$$\text{و} \quad C_{10}^1 \quad \text{و} \quad C_8^8 \quad \text{و} \quad C_{12}^0 \quad \text{و} \quad C_{11}^8$$

تمرين 9: أحسب: $4!$ و $5!$ و $7!$ و C_{10}^2 و

$$C_{13}^2 \quad \text{و} \quad C_{13}^4 \quad \text{و} \quad C_{12}^3 \quad \text{و} \quad A_8^5 \quad \text{و} \quad A_7^3 \quad \text{و} \quad A_7^4 \quad \text{و}$$

$$\frac{12 \times 7!}{10 \times 8!} \quad \text{و} \quad \frac{A_8^2 \times A_{10}^4}{A_8^5} \quad \text{و} \quad \frac{12!}{10!} \quad \text{و} \quad \frac{8 \times 3}{7!}$$

$$\frac{9 \times 7!}{5 \times 8!} \quad \text{و} \quad \frac{10^9}{5^8} \quad \text{و} \quad \frac{A_9^4}{A_9^2} \quad \text{و} \quad \frac{C_7^4 \times C_{10}^8}{C_{10}^7} \quad \text{و} \quad \frac{9 \times 5!}{8 \times 3!}$$

تمرين 10: أحسب: $4!$ و $5!$ و $7!$

1. أحسب: C_4^2 و C_5^2 و C_7^4 و C_{12}^3

2. أحسب: A_4^2 و A_5^3 و A_7^4

3. أحسب و بسط: $\frac{10 \times 5!}{6 \times 8!}$ و $\frac{A_6^3 \times A_{10}^4}{A_{10}^5}$

الجواب: (1)

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \quad \text{و} \quad 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2!} = 6(2)$$

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2!} = 10$$

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} = 35$$

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{9!3!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!3!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3!} = 220$$

$$A_4^2 = 4 \times 3 = 12 \quad A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60 \quad (3)$$

$$A_7^4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

$$\text{و} \quad \frac{10 \times 5!}{6 \times 8!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 5!}{6 \times 5 \times 8!} = \frac{10 \times 9}{6} = \frac{10 \times 3 \times 3}{3 \times 2} = \frac{10 \times 3}{2} = 15(4)$$

$$\frac{A_6^3 \times A_{10}^4}{A_{10}^5} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{5 \times 4}{1} = 20$$

II. تجربة عشوائية- مصطلحات:

نشاط 4: رمي نرد مكعب و وجوهه الستة مرقمة من 1 إلى 6 واحدة

هي تجربة عشوائية و كون الإمكانيات المرتبط بهذه التجربة هو:

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

نعتبر: "الحصول على عدد زوجي" A يعني $A = \{2; 4; 6\}$

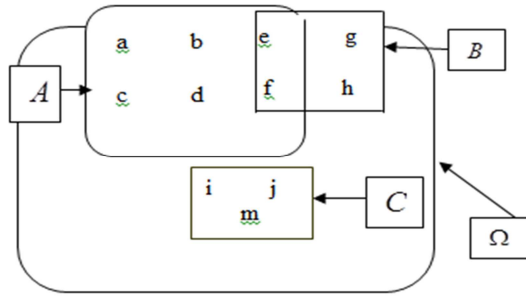
A جزء من الكون Ω ويسمى حدثا

الحدث: كل مجموعة مكونة من إمكانية أو أكثر (أي كل جزء من الكون Ω).

" ظهور رقم فردي " B هو حدث آخر يعني: $B = \{1; 3; 5\}$

" ظهور رقم قابل للقسمة على 3 " C هو حدث آخر يعني:

$$C = \{3; 6\}$$



الفئة A يمارسون كرة القدم

الفئة B يمارسون كرة اليد

الفئة C يمارسون كرة السلة

نختار عشوائيا احد التلاميذ من هذا القسم

(1) أكتب A و B و C و Ω و \bar{A} و \bar{B} و \bar{C} و $A \cap B$ و $A \cup B$ و $A \cap C$ و $A \cup C$ بالتفصيل

(2) أحسب: $P(A)$ و $P(B)$ و $P(C)$ و $P(A \cap B)$ و $P(A \cup B)$

(3) قارن: $1 - p(A)$ و $p(\bar{A})$ و $1 - p(C)$ و $p(\bar{C})$

(4) تحقق أن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(5) تحقق أن: $P(A \cup C) = P(A) + P(C)$

(الجواب: 1) $B = \{e; f; g; h\}$ $A = \{a; b; c; d; e; f\}$

$\Omega = \{a; b; c; d; e; f; g; h; i; j; m\}$ $C = \{i; j; m\}$

$\bar{C} = \{a; b; c; d; e; f; g; h\}$ $\bar{A} = \{g; h; i; j; m\}$

$A \cup B = \{a; b; c; d; e; f; g; h\}$ $A \cap B = \{e; f\}$

$A \cup C = \{a; b; c; d; e; f; i; j; m\}$ $A \cap C = \emptyset$

(2) $p(B) = \frac{\text{Card}B}{\text{Card}\Omega} = \frac{4}{11}$ $p(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \frac{6}{11}$

و $p(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}\Omega} = \frac{2}{11}$ $p(C) = \frac{\text{Card}C}{\text{Card}\Omega} = \frac{3}{11}$

و $p(A \cap C) = \frac{\text{Card}(A \cap C)}{\text{Card}\Omega} = \frac{0}{11} = 0$ $p(A \cup B) = \frac{\text{Card}(A \cup B)}{\text{Card}\Omega} = \frac{8}{11}$

و $p(\bar{A}) = \frac{\text{Card}\bar{A}}{\text{Card}\Omega} = \frac{5}{11}$ $p(A \cup C) = \frac{\text{Card}(A \cup C)}{\text{Card}\Omega} = \frac{9}{11}$

$p(\bar{C}) = \frac{\text{Card}\bar{C}}{\text{Card}\Omega} = \frac{8}{11}$

(3) $1 - p(A) = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11} = p(\bar{A})$ و $1 - p(C) = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$

(4) $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{11} + \frac{4}{11} - \frac{2}{11} = \frac{8}{11} = P(A \cup B)$

(5) $P(A) + P(C) = \frac{6}{11} + \frac{3}{11} = \frac{9}{11} = P(A \cup C)$

خاصية 2: ليكن Ω كون إمكانية تجربة عشوائية،

$p(\emptyset) = 0$ لكل حدث A ، $p(\Omega) = 1$

و لكل حدث A لدينا $0 \leq p(A) \leq 1$ و $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

الحدث $A \cap B$ هو الحدث A و B ويقرأ تقاطع الحدثين A و B
 $A \cap B = \emptyset$ ونقول الحدثين A و B منفصلين أو غير منسجمين

$$A \cap C = \{6\}$$

الحدث الابتدائي: كل حدث يحتوي على إمكانية واحدة يسمى حدثا
مثال: $A \cap C = \{6\}$ حدث ابتدائي.

الحدث $A \cup B$ هو الحدث A أو B . ويقرأ اتحاد الحدثين A و B
 الحدث $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \Omega$ هو الحدث الأكيد

$$A \cup C = \{2; 3; 4; 6\}$$

نعتبر الحدث التالي: "عدم ظهور رقم قابل للقسمه على 3" D
 الحدث $D = \{1; 2; 4; 5\}$ يسمى الحدث المضاد للحدث C ونكتب

$$D = \bar{C}$$

III. استقرار تردد حدث_ وفرضية تساوي الاحتمالات واحتمال حدث:

نشاط: رمينا نردا مكعبا (وجوهه الستة مرقمة من 1 الى 6) 1000 مرة و حصلنا على الترددات التالية:

الرقم	1	2	3	4	5	6
التردد	0,160	0,162	0,171	0,166	0,167	0,174

■ تردد رقم 4 هو $0,166 = \frac{166}{1000}$ ، أي أن النرد عين 166 مرة الرقم 4 خلال 1000 رمية.

لدينا: $\left(\frac{1}{6} = 0,1666\dots\right)$ تردد الرقم 4 يستقر حول العدد $\frac{1}{6}$ ، نقول إن

احتمال الحصول على الرقم 4 هو $\frac{1}{6}$.

و نكتب: $p(\{4\}) = \frac{1}{6}$. (نلاحظ أن ترددات الأرقام الأخرى قريبة أيضا من العدد $\frac{1}{6}$).

■ نعتبر الحدث A "الحصول على عدد زوجي" يعني:

$A = \{2; 4; 6\}$ لدينا تردد الحدث A هو مجموع ترددات كل من

الأرقام 2 و 4 و 6، أي: $0,162 + 0,166 + 0,174 = 0,502$ نقول إن احتمال الحدث A هو $0,502$ ، و نكتب $P(A) = 0,502$.

لدينا: $0,5 = \frac{3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ ، و هو ما يفسر

استقرار تردد الحدث A .

اذن: احتمال الحدث A نرسم له بالرمز $P(A)$ ولدينا الخاصية

التالية:

خاصية 1: إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية كون إمكانيةها Ω ، فإن احتمال كل حدث A هو:

$$p(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega}$$

نشاط: الخطأ جانبه تبين توزيع تلاميذ أحد الأقسام حسب

الممارسة الرياضية:

الجواب: 1 $card(\Omega) = 12$ وهو ببساطة عدد الكرات في

الصندوق

$$p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \quad p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{0}{12} = 0 \quad (2)$$

$$p(D) = \frac{CardD}{Card\Omega} = \frac{5}{12} \quad p(C) = \frac{CardC}{Card\Omega} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

E هو الحدث المضاد للحدث A أي $E = \bar{A}$ ومنه

$$p(E) = p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

مثال 2: السحب تآنيا- التآليات

يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 5 كرات حمراء
نسحب عشوائيا كرتين من الصندوق في آن واحد

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب كرتين بيضاوين " B " سحب كرتين حمراوين " R

" سحب كرتين من نفس اللون " M

" سحب كرتين من لون مختلف " D

$$\text{الأجوبة: } (1) = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2!6!} = \frac{8 \times 7}{2!} = 28$$

$$card(\Omega) = C_8^2$$

$$p(R) = \frac{CardR}{Card\Omega} = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{10}{28} \quad p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28} \quad (2)$$

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2!} = 10$$

سحب كرتين من نفس اللون أي سحب كرتين بيضاوين أو كرتين

$$\text{حمراوين} \quad p(M) = \frac{CardM}{Card\Omega} = \frac{C_3^2 + C_5^2}{C_8^2} = \frac{3+10}{28} = \frac{13}{28}$$

D هو الحدث المضاد للحدث M أي $D = \bar{M}$ ومنه

$$p(D) = p(\bar{M}) = 1 - p(M) = 1 - \frac{13}{28} = \frac{15}{28}$$

تمرين 13: يحتوي صندوق غير كاشف على 4 كرات بيضاء و 5

كرات حمراء و 3 كرات سوداء

نسحب عشوائيا ثلاث كرات من الصندوق في آن واحد

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب ثلاث كرات بيضاء " B " سحب ثلاث كرات سوداء " N

" سحب ثلاث كرات حمراء " R

" سحب ثلاث كرات من لون مختلف " D

" سحب ثلاث كرات من نفس اللون " M

" سحب كرتين بيضاوين فقط " E

الجواب: 1 $card(\Omega) = C_{12}^3$ ومنه

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3!9!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3!} = \frac{6 \times 2 \times 11 \times 10}{6} = 220$$

لكل حدثين غير منسجمين A و B ($A \cap B = \phi$)

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

لكل حدثين A و B لدينا

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

تمرين 11: A و B حدثان مرتبطان بنفس التجربة العشوائية

بحيث:

$$p(A) = 0,7 \quad p(B) = 0,4 \quad p(A \cap B) = 0,3$$

أحسب: $p(\bar{A})$ و $p(\bar{B})$ و $p(A \cup B)$

$$\text{الجواب: } p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0,7 = 0,3$$

$$p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - 0,4 = 0,6$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$= 0,7 + 0,4 - 0,3 = 0,8$$

IV. أنواع السحب:

1) السحب الآني :

مثال 1: يحتوي صندوق غير كاشف على 5 كرات بيضاء و 3

كرات سوداء و كرتين حمراوين

نسحب عشوائيا من الصندوق كرة واحدة

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

3. " سحب كرة بيضاء " B و " سحب كرة سوداء " N

" سحب كرة حمراء " R و " عدم سحب كرة سوداء " D

الجواب: 1 $card(\Omega) = 10$ وهو ببساطة عدد الكرات في

الصندوق

$$(2) \quad p(N) = \frac{CardN}{Card\Omega} = \frac{3}{10} \quad p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$p(R) = \frac{CardR}{Card\Omega} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

D هو الحدث المضاد للحدث N أي $D = \bar{N}$ ومنه

$$p(D) = p(\bar{N}) = 1 - p(N) = 1 - 0,3 = 0,7$$

تمرين 12: يحتوي صندوق غير كاشف على أقرص مرقمة :

قرصان منهم يحملان الرقم 1 و ثلاث أقرص منهم يحملون الرقم 2 و

سبعة أقرص تحمل الرقم 4

نسحب عشوائيا من الصندوق قرصا واحدا

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

" سحب قرص يحمل الرقم 1 " A

" سحب قرص يحمل الرقم 3 " B

" سحب قرص يحمل رقم زوجي " C

" سحب رقم أصغر من أو يساوي 2 " D " سحب

قرص لا يحمل الرقم 1 " E

سحب كرة واحدة سوداء فقط يعني كرة واحدة سوداء وكرتين غير

سوداوين يعني مسحوبة من بين الألوان الأخرى

$$p(E) = \frac{CardE}{Card\Omega} = \frac{C_3^1 \times C_7^2}{120} = \frac{3 \times C_7^2}{120}$$

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{2!5!} = \frac{7 \times 6}{2!} = 21 \quad \text{نحسب } C_7^2$$

$$p(E) = \frac{3 \times 21}{120} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40} \quad \text{ومنه}$$

سحب كرتين حمراوين فقط يعني سحب كرتين حمراوين وكرة ثالثة من بين الألوان الأخرى

$$\text{لأن: } p(F) = \frac{CardF}{Card\Omega} = \frac{C_6^1 \times C_4^2}{120} = \frac{6 \times C_4^2}{120} = \frac{6 \times 6}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2!} = 6$$

الحدث المضاد للحدث " سحب كرة بيضاء على الأقل " G

هو: " عدم سحب أي كرة بيضاء " \bar{G} يعني سحب كرة من بين الألوان المتبقية

$$\text{نحسب احتمال الحدث } \bar{G} \text{ اذن: } p(\bar{G}) = \frac{C_7^3}{120} \text{ ونحسب } C_7^3$$

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

$$\text{ومنه: } p(\bar{G}) = \frac{35}{120} = \frac{7}{24} \text{ ونعلم:}$$

$$p(G) + p(\bar{G}) = 1 \text{ يعني: } p(G) = 1 - p(\bar{G}) = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$$

مثال 3: السحب بدون إحلال- الترتيبات بدون تكرار

يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق:

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانات

2. حدد احتمال الأحداث التالية:

" سحب كرتين بيضاوين " B " سحب كرتين سوداوين " N

" سحب كرتين من نفس اللون " M " سحب كرتين من لون

مختلف " D

" سحب كرة واحدة بيضاء " E

$$\text{الجواب: (1) } card(\Omega) = A_7^2 = 7 \times 6 = 42$$

$$p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{A_3^2}{42} = \frac{3 \times 2}{7 \times 6} = \frac{1}{7} \quad (2)$$

$$p(N) = \frac{CardN}{Card\Omega} = \frac{A_4^2}{42} = \frac{4 \times 3}{7 \times 6} = \frac{2 \times 2 \times 3}{7 \times 6} = \frac{2}{7}$$

$$p(M) = \frac{CardM}{Card\Omega} = \frac{A_4^2 + A_3^2}{42} = \frac{4 \times 3 + 3 \times 2}{7 \times 6} = \frac{18}{7 \times 6} = \frac{3 \times 6}{7 \times 6} = \frac{3}{7}$$

D هو الحدث المضاد للحدث M أي $D = \bar{M}$ ومنه

$$p(D) = p(\bar{M}) = 1 - p(M) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

حساب احتمال الحدث E: هناك حالتين

$$p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{C_4^3}{28} = \frac{4}{28} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \quad (2)$$

$$p(R) = \frac{CardR}{Card\Omega} = \frac{C_5^3}{28} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14} \quad \text{و } p(N) = \frac{CardN}{Card\Omega} = \frac{C_3^3}{28} = \frac{1}{28}$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2!} = 10$$

سحب 3 كرات من لون مختلف يعني سحب كرة واحدة حمراء وواحدة سوداء كرة واحدة بيضاء

$$p(D) = \frac{CardD}{Card\Omega} = \frac{C_3^1 \times C_4^1 \times C_5^1}{28} = \frac{3 \times 4 \times 5}{220} = \frac{15}{55} = \frac{3}{11}$$

M هو الحدث المضاد للحدث D أي $M = \bar{D}$ ومنه

$$p(M) = p(\bar{D}) = 1 - p(D) = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11} = \frac{2}{7}$$

$$p(E) = \frac{CardE}{Card\Omega} = \frac{C_4^2 \times C_8^1}{220} = \frac{6 \times 8}{220} = \frac{12}{55}$$

تمرين 14: يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4

كرات حمراء و 3 كرات سوداء

نسحب عشوائيا ثلاث كرات من الصندوق في آن واحد

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانات

2. حدد احتمال الأحداث التالية:

" سحب ثلاث كرات بيضاء " B " سحب ثلاث كرات حمراء " R

" سحب ثلاث كرات من لون مختلف " D " سحب ثلاث كرات من

نفس اللون " M

" سحب كرة واحدة سوداء فقط " E " سحب كرتين حمراوين فقط " F

" سحب كرة بيضاء على الأقل " G

الأجوبة (1) $card(\Omega) = C_{10}^3$

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = \frac{5 \times 2 \times 3 \times 3 \times 8}{6} = 120$$

$$C_n^n = 1 \quad \text{لأننا نعلم ن: } p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{C_3^3}{120} = \frac{1}{120} \quad (2)$$

$$C_n^{n-1} = n \quad \text{لأننا نعلم ن: } p(R) = \frac{CardR}{Card\Omega} = \frac{C_4^3}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

سحب 3 كرات من لون مختلف يعني سحب كرة واحدة حمراء ورة

واحدة سوداء واحدة بيضاء

$$p(D) = \frac{CardD}{Card\Omega} = \frac{C_3^1 \times C_4^1 \times C_5^1}{120} = \frac{3 \times 4 \times 4}{120} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$$

M هو الحدث المضاد للحدث D أي $M = \bar{D}$ ومنه

$$p(M) = p(\bar{D}) = 1 - p(D) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$= \frac{4 \times 4}{7 \times 7} = \frac{16}{49} \quad p(B) = \frac{\text{Card}B}{\text{Card}\Omega} = \frac{3 \times 3}{49} = \frac{9}{49} \quad (2)$$

$$p(M) = \frac{\text{Card}M}{\text{Card}\Omega} = \frac{3 \times 3 + 4 \times 4}{7 \times 7} = \frac{25}{49} \quad p(N) = \frac{\text{Card}N}{\text{Card}\Omega} = \frac{A_4^1 \times A_5^1}{42} = \frac{2 \times 3 \times 4}{7 \times 6} = \frac{4}{7}$$

D هو الحدث المضاد للحدث M أي $D = \bar{M}$ ومنه

$$p(D) = p(\bar{M}) = 1 - p(M) = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49}$$

حساب احتمال الحدث E : هناك حالتين

السحبة الأولى	السحبة الثانية	السحبة الأولى	السحبة الثانية
B	\bar{B}	B	\bar{B}

$$p(E) = \frac{3 \times 4 + 3 \times 4}{42} = \frac{2 \times 3 \times 4}{7 \times 7} = \frac{24}{49}$$

V. الاحتمال الشرطي:

نشاط: يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء بحيث: كرتين تحملان الرقم 1 و ثلاث كرات تحمل الرقم 2 وكذلك يحتوي على 7 كرات سوداء بحيث 4 كرات تحمل الرقم 2 و ثلاث كرات تحمل الرقم 1 لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس. نسحب عشوائياً كرة واحدة من الصندوق.

نعتبر الأحداث التالية: "الكرة المسحوبة بيضاء": B

"الكرة المسحوبة سوداء": N

"الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1": U

"الكرة المسحوبة تحمل الرقم 2": D

(1) أحسب احتمال الأحداث التالية: B و N و U و D و $B \cap U$ و $N \cap D$ و

(2) إذا كانت أو علماً أن الكرة المسحوبة بيضاء فما هو الاحتمال لكي تكون حاملة للرقم 1

$$(ب) \text{ قارن: } P_B(U) \text{ و } \frac{P(B \cap U)}{P(B)}$$

(3) إذا كانت أو علماً أن الكرة المسحوبة سوداء فما هو الاحتمال لكي تكون حاملة للرقم 2

$$(ب) \text{ قارن: } P_N(D) \text{ و } \frac{P(D \cap N)}{P(N)}$$

$$\text{أجوبة: (1) } card(\Omega) = 12 \text{ و } P(D) = \frac{7}{12} \text{ و } P(U) = \frac{7}{12}$$

$$\text{و } P(B) = \frac{5}{12} \text{ و } P(U) = \frac{5}{12}$$

$$P(N \cap D) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ و } P(B \cap U) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$(أ) (2) \quad P_B(U) = \frac{2}{5} \quad (ب) \quad \frac{P(B \cap U)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5} = P_B(U)$$

$$(أ) (3) \quad P_N(D) = \frac{4}{7} \quad (ب) \quad \frac{P(D \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{4}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{4}{7} = P_N(D)$$

$$\text{اذن نلاحظ أن: } \frac{P(D \cap N)}{P(N)} = P_N(D) \text{ أي } P(N \cap D) = P(N)P_N(D)$$

$P_N(D)$: يقرأ كذلك احتمال الحدث D علماً أن الحدث N محقق أو يقرأ احتمال سحب كرة تحمل الرقم 2 علماً أنها سوداء

	السحبة الثانية	السحبة الأولى
السحبة الثانية	السحبة الأولى	B
B	\bar{B}	

تمرين 15: يحتوي صندوق غير كاشف على 4 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء نسحب عشوائياً بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانات

2. حدد احتمال الأحداث التالية:

" سحب ثلاث كرات بيضاء " B " سحب ثلاث كرات سوداء " N

" سحب ثلاث كرات من نفس اللون " M " سحب ثلاث كرات من لون مختلف " D

" سحب كرتين بيضاوين فقط " E

$$\text{الجواب: (1) } card(\Omega) = A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

$$p(B) = \frac{\text{Card}B}{\text{Card}\Omega} = \frac{A_4^3}{504} = \frac{4 \times 3 \times 2}{9 \times 8 \times 7} = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 3 \times 8 \times 7} = \frac{1}{21} = \frac{1}{21} \quad (2)$$

$$p(N) = \frac{\text{Card}N}{\text{Card}\Omega} = \frac{A_5^3}{504} = \frac{5 \times 4 \times 3}{9 \times 8 \times 7} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 3 \times 4 \times 2 \times 7} = \frac{5}{42}$$

$$p(M) = \frac{\text{Card}M}{\text{Card}\Omega} = \frac{A_4^3 + A_5^3}{504} = \frac{4 \times 3 \times 2 + 5 \times 4 \times 3}{504} = \frac{24 + 60}{504} = \frac{84}{504} = \frac{1}{6}$$

D هو الحدث المضاد للحدث M أي $D = \bar{M}$ ومنه

$$p(D) = p(\bar{M}) = 1 - p(M) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

حساب احتمال الحدث E : هناك 3 حالات

السحبة الأولى	السحبة الثانية	السحبة الثانية
B	B	\bar{B}

السحبة الأولى	السحبة الثانية	السحبة الثانية
B	\bar{B}	B

السحبة الأولى	السحبة الثانية	السحبة الثانية
\bar{B}	B	B

$$p(E) = \frac{3A_4^1 \times A_5^1}{9 \times 8 \times 7} = \frac{3 \times 4 \times 3 \times 5}{9 \times 8 \times 7} = \frac{5}{14}$$

مثال 4: السحب بإحلال- الترتيبات بتكرار:

يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء نسحب عشوائياً بالتتابع وبإحلال كرتين من الصندوق:

1. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانات

2. حدد احتمال الأحداث التالية:

" سحب كرتين بيضاوين " B

" سحب كرتين سوداوين " N

" سحب كرتين من نفس اللون " M

" سحب كرتين من لون مختلف " D

" سحب كرة واحدة بيضاء " E

(الجواب: 1)

$$card(\Omega) = 7 \times 7 = 7^2 = 49$$

سؤال اضافي: علما أن الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1 فما هو الاحتمال سحب كرة بيضاء

$$\frac{P(U \cap B)}{P(U)} = \frac{\frac{12}{5}}{\frac{12}{7}} = \frac{4}{7} = P_U(B) \text{ أو } P_U(B) = \frac{2}{5} \text{ الجواب:}$$

(1) تعريف: ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث $P(A) \neq 0$.

احتمال الحدث B , علما أن الحدث A محقق, هو العدد الذي نرمز له بالرمز $P_A(B)$ أو $P(B/A)$.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

و المعروف بما يلي: $P_A(B)$ يقرأ احتمال الحدث B علما أن الحدث A محقق

نتيجة: ليكن Ω كون إمكانيات عشوائية.

إذا كان A و B حدثين من Ω و $P(A) \neq 0$ و $P(B) \neq 0$.

فان: $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$.

مثال: نرمي نردا أوجهه الستة مرقمة من 1 إلى 6 مرة واحدة ونعتبر

الحدثين التاليين:

" ظهور رقم زوجي A " و " ظهور رقم مضاعف للعدد 3 B "

(1) حدد احتمال الأحداث التالية: A و B و $A \cap B$ و $P_B(A)$

(2) قارن: $p(A \cap B)$ و $p(A) \times p(B)$

$$\text{أجوبة: } P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ و } P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

" ظهور رقم زوجي و مضاعف للعدد 3 $A \cap B$ "

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \text{ و } P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

(2) نلاحظ أن: $p(A) \times p(B) = p(A \cap B)$

نقول إن الحدثين A و B مستقلان

(2) استقلالية حدثين:

تعريف: ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية.

نقول إن الحدثين

A و B مستقلان إذا كان: $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

خاصية: ليكن A و B حدثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية

حيث $P(A) \neq 0$.

A و B مستقلان إذا و فقط إذا كان: $P_A(B) = p(B)$

ملحوظة: A و B حدثان مستقلان يعني أن تحقيقي أحدهما لا

يتأثر بتحقيق أو عدم تحقيق الآخر.

VI. استقلالية اختبارين:

مثال: نعتبر صندوقين A و B بحيث يحتوي الصندوق A على 7 كرات: 3 بيضاء و 4 سوداء يحتوي الصندوق B على 10 كرات: 4 بيضاء و 6 سوداء.

لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس. نقوم بالتجربة التالية: نسحب كرة من الصندوق A و كرة من الصندوق B .

نعتبر الحدث E : "الحصول على كرة بيضاء من A و على كرة سوداء من B "

نلاحظ أن هذه التجربة مكونة من اختبارين: أحدهما هو سحب كرة الصندوق A , و الآخر هو سحب كرة من الصندوق B و أن الاحتمالات المرتبطة بأحد الاختبارين لا تتعلق بنتائج الاختبار الآخر. نقول في هذه الحالة إن هذه التجربة مكونة من اختبارين مستقلين.

باعتبار الحدثين: E_1 " سحب كرة بيضاء من A " و E_2 " سحب كرة سوداء من B " يكون احتمال الحدث E هو جداء احتمال الحدثين E_1

و E_2 يعني: $p(E) = p(E_1) \times p(E_2)$.

و بما أن: $p(E_1) = \frac{3}{7}$ و أن: $p(E_2) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ فان:

$$p(E) = \frac{3}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{35}$$

تمرين 16: يحتوي صندوق على 3 نرود

نسحب واحدا ثم نرميه ونسحب آخر ثم نرميه

1- ما هو عدد النتائج الممكنة؟

2- احسب احتمال ظهور الرقم 4

الحل

1- عدد النتائج الممكنة

$$card \Omega = C_3^1 \times 6 \times C_2^1 \times 6 = 216$$

2- نعتبر الحدث A : "ظهور الرقم 4"

\bar{A} : "عدم ظهور الرقم 4"

$$card \bar{A} = C_3^1 \times 5 \times C_2^1 \times 5 = 150$$

$$card A = card \Omega - card \bar{A} = 216 - 150 = 66$$

$$p(A) = \frac{66}{216}$$

VII. المتغيرات العشوائية- قانون احتمال متغير عشوائي:

تعريف: ليكن (Ω, P) فضاء احتماليا منتها

كل تطبيق X من Ω نحو \mathbb{R} يسمى متغيرا عشوائيا

مثال 1: يحتوي صندوق على:

ثلاثة كرات تحمل الرقم 1 و كرة واحدة تحمل الرقم 0 و الكرات

المتبقية تحمل الرقم 2.

نسحب عشوائيا كرتين تانيا.

و ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجداء الأرقام

الموجودة على الكرتين المسحوبتين.

إذا افترضنا أن هناك تساوي الاحتمال لكل السحبات:

(1) حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X .

(2) حدد قانون احتمال X .

(3) حدد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل X

(الأجوبة: 1): تحديد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X .

يمكننا مثلا سحب كرتين تحملان الرقم 1 اذن الجداء هو 1

يمكننا مثلا سحب كرتين تحملان الرقم 2 اذن الجداء هو 4

من بين الكرات المسحوبة كرة تحمل الرقم 0 ومنه الجداء هو 0

يمكننا مثلا سحب كرة تحمل الرقم 1 وكرة تحمل الرقم 2 اذن الجداء هو 2

هل هناك امكانية أخرى ؟

اذن جميع القيم هي : 0 و 1 و 2 و 4

نكتب : $X(\Omega) = \{0; 1, 2, 4\}$

(2) تحديد قانون احتمال X .

■ نرمز للحدث: " من بين الكرات المسحوبة كرة تحمل الرقم 0 "

بالرمز: $(X = 0)$

$(X = 0)$ يعني " جداء الأرقام الموجودة على الكرتين المسحوبتين

يساوى الصفر "

نحسب احتمال الحدث : $(X = 0)$

$$P(X = 0) = \frac{C_1^1 \times C_7^1}{C_8^2} = \frac{1 \times 7}{28} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

الحدث: " سحب كرتين تحملان الرقم 1 " بالرمز: $(X = 1)$

$$P(X = 1) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}$$

الحدث: " سحب كرة تحمل الرقم 1 و كرة تحمل الرقم 2 " بالرمز:

$(X = 2)$

$$P(X = 2) = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_8^2} = \frac{3 \times 4}{28} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

الحدث: " سحب كرتين تحملان الرقم 2 " بالرمز: $(X = 4)$

$$P(X = 4) = \frac{C_4^2}{C_8^2} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

اذن : هذه النتائج نلخصها فيجدول يسمى : قانون احتمال X .

$X(\Omega)$	0	1	2	4
$P(X = x_i)$	$7/28 = 1/4$	$3/28$	$12/28 = 3/7$	$6/28 = 3/14$

نلاحظ أن :

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 4) = 1$$

(3) حساب الأمل الرياضي : نرمز له ب : $E(X)$

$$E(X) = 0 \times p(X=0) + 1 \times p(X=1) + 2 \times p(X=2) + 4 \times p(X=4)$$

$$E(X) = \left(0 \times \frac{7}{28}\right) + \left(1 \times \frac{3}{28}\right) + \left(2 \times \frac{12}{28}\right) + \left(4 \times \frac{6}{28}\right) = \frac{3+24+24}{28} = \frac{51}{28}$$

حساب المغايرة : نرمز له ب : $V(X)$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \left(0^2 \times \frac{7}{28}\right) + \left(1^2 \times \frac{3}{28}\right) + \left(2^2 \times \frac{12}{28}\right) + \left(4^2 \times \frac{6}{28}\right) - \left(\frac{51}{28}\right)^2$$

$$= \frac{3}{28} + \frac{48}{28} + \frac{96}{28} - \left(\frac{51}{28}\right)^2 = \frac{147}{28} - \left(\frac{51}{28}\right)^2 = \frac{4116}{28^2} - \frac{2601}{28^2}$$

$$V(X) = \frac{1515}{784}$$

حساب الانحراف الطرازي : $\sigma(X)$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \text{ هو الانحراف الطرازي هو}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1515}{784}}$$

تمرين 17 : ليكن X متغيرا عشوائيا قانون احتماله معرف في الجدول التالي:

x_i	-1	0	2	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{6}$

(1) أحسب احتمال الحدث $(X = 2)$ أي قيمة a

(2) أحسب $E(X)$ و $\sigma(X)$.

مثال 2: يحتوي صندوق على 6 كرات تحمل الأرقام: 0, 1, 1, 1, 2, 2,

2, 2, لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب عشوائيا و تأنيا كرتين من الصندوق. ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية.

ليكن Y المتغير العشوائي التي يربط كل نتيجة بمجموع رقمي الكرتين المسحوبتين

(1) حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Y .

(2) حدد قانون احتمال Y .

(3) حدد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل Y

أجوبة :

(1) إذا كانت الكرتان المسحوبتان تحملان الرقمين 0 و 1 على التوالي

$$x = 1 + 0 = 1$$

و إذا كانتا تحملان الرقمين 1 و 2 على التوالي فإن $x = 1 + 2 = 3$. القيم الممكنة تسمى القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Y و هي تكون

مجموعة نرمز لها بالرمز $Y(\Omega)$

$$Y(\Omega) = \{1; 2; 3; 4\}$$

(2) لنحدد قانون احتمال المتغير العشوائي Y .

$$Y(\Omega) = \{1; 2; 3; 4\}$$

■ $(X = 1)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 0, و على كرة تحمل الرقم 1

$$\text{اذن } p(Y = 1) = \frac{C_1^1 \times C_2^1}{C_6^2} = \frac{2}{15}$$

■ $(Y = 2)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 2, و على كرة تحمل الرقم 0. أو الحصول على كرتين تحملان الرقم 1.

$$\text{اذن: } p(Y = 2) = \frac{C_1^1 \times C_3^1 + C_2^2}{C_6^2}$$

■ $(Y = 3)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم 1, و على كرة

$$\text{تحمل الرقم 2. اذن. } p(Y = 3) = \frac{C_1^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

■ $(Y = 4)$ يعني الحصول على كرتين تحملان الرقم 2, اذن:

$$p(Y = 4) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$$

نلخص قانون احتمال المتغير العشوائي Y في الجدول التالي:

x_i	1	2	3	4
$p(Y = x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{3}{15}$

(3) تحديد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل Y
 ■ الأمل الرياضي هو:

$$E(Y) = \left(1 \times \frac{2}{15}\right) + \left(2 \times \frac{4}{15}\right) + \left(3 \times \frac{6}{15}\right) + \left(4 \times \frac{3}{15}\right) = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

■ المغايرة هي:

$$E(Y^2) - (E(Y))^2 = \left(1^2 \times \frac{2}{15}\right) + \left(2^2 \times \frac{4}{15}\right) + \left(3^2 \times \frac{6}{15}\right) + \left(4^2 \times \frac{3}{15}\right) - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = 8 - \frac{64}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

الانحراف الطرازي هو:

تمرين 18: يحتوي صندوق على 6 كرات تحمل الأرقام: **0, -1, -1, 1, 1, 2**

لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب عشوائيا و تأنيا كرتين من الصندوق. ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية.

ليكن Z المتغير العشوائي التي يربط كل نتيجة **بمجموع** رقمي الكرتين المسحوبتين

(1) حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Z .

(2) حدد قانون احتمال Z .

(3) حدد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل Z
أجوبة:

$$(1) (-1) + (-1) = (-2)$$

$$(-1) + (0) = (-1)$$

$$(0) + (-1) = (-1)$$

$$(1) + (0) = (1) \text{ أو } (2) + (-1) = (1)$$

$$(2) + (0) = (2)$$

$$(2) + (1) = (3)$$

القيم الممكنة تسمى القيم التي يأخذها المتغير العشوائي Z

$$\text{هي: } Z(\Omega) = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

(2) لنحدد قانون احتمال المتغير العشوائي Z .

$$\text{لدينا: } Z(\Omega) = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

■ $(Z = -2)$ يعني الحصول على كرتين تحملان -1

$$\text{إذن: } p(Z = -2) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15}$$

■ $(Z = -1)$ يعني "الحصول على كرة تحمل الرقم -1 و على كرة

تحمل الرقم 0."

$$\text{إذن: } p(Z = -1) = \frac{C_3^1 \times C_1^1}{C_6^2} = \frac{3}{15}$$

■ $(Z = 0)$ يعني "الحصول على كرة تحمل الرقم -1 و على كرة

تحمل الرقم 1."

$$\text{إذن: } p(Z = 0) = \frac{C_1^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{15}$$

■ $(Z = 1)$ يعني الحصول على كرة تحمل الرقم -1 و على كرة تحمل الرقم 2.

أو الحصول على كرة تحمل الرقم 0 و على كرة تحمل الرقم 1

$$\text{إذن: } p(Z = 1) = \frac{C_1^1 \times C_3^1 + C_1^1 \times C_1^1}{C_6^2} = \frac{4}{15}$$

■ $(Z = 2)$ يعني "الحصول على كرة تحمل الرقم 2 و على كرة تحمل الرقم 0."

$$\text{إذن: } p(Z = 2) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_6^2} = \frac{1}{15}$$

■ $(Z = 3)$ يعني "الحصول على كرة تحمل الرقم 2 و على كرة تحمل الرقم 1."

$$\text{إذن: } p(Z = 3) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_6^2} = \frac{1}{15}$$

نلخص قانون احتمال المتغير العشوائي Z في الجدول التالي:

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$p(Z = x_i)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$

(3) تحديد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل Z
 ■ الأمل الرياضي هو:

$$E(Z) = \left(-2 \times \frac{3}{15}\right) + \left(-1 \times \frac{3}{15}\right) + \left(0 \times \frac{3}{15}\right) + \left(1 \times \frac{4}{15}\right) + \left(2 \times \frac{1}{15}\right) + \left(3 \times \frac{1}{15}\right)$$

$$E(Z) = \left(-\frac{6}{15}\right) + \left(-\frac{3}{15}\right) + \left(\frac{4}{15}\right) + \left(\frac{2}{15}\right) + \left(\frac{3}{15}\right) = 0$$

■ المغايرة هي: $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$

$$V(Z) = \left(-2^2 \times \frac{3}{15}\right) + \left(-1^2 \times \frac{3}{15}\right) + \left(0^2 \times \frac{3}{15}\right) + \left(1^2 \times \frac{4}{15}\right) + \left(2^2 \times \frac{1}{15}\right) + \left(3^2 \times \frac{1}{15}\right) - 0^2$$

$$V(Z) = \left(\frac{12}{15}\right) + \left(\frac{3}{15}\right) + \left(\frac{4}{15}\right) + \left(\frac{4}{15}\right) + \left(\frac{9}{15}\right) = \frac{32}{15}$$

■ الانحراف الطرازي هو: $\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{\frac{32}{15}}$

تمرين 19: يحتوي كيس على تسع بيدات مرقمة من 1 إلى 9, و لا يمكن التمييز بينها باللمس.

نسحب بالتتابع و بدون إحلال 3 بيدات من الكيس

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل ممكنة لثلاث بيدات **بعدها** البيدات التي تحمل رقما فرديا

(1) حدد قانون احتمال X .

(2) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ و المغايرة $V(X)$.

أجوبة:

(1)

في ثلاث البيدات المسحوبة يمكننا عدم سحب أي بيدة تحمل رقما

فرديا أي عدد البيدات الفردية يساوي 0

أو يمكننا سحب بيدة واحدة تحمل رقما فرديا أي عدد البيدات الفردية

يساوي 1

أو يمكننا سحب بیدتين تحملان رقما فرديا أي عدد البيدات الفردية

يساوي 2

أو يمكننا سحب ثلاثة تحمل رقما فرديا أي عدد البيدات الفردية

يساوي 3

اذن القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X هي:

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$$

(2) لنحدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$$

▪ ($X=0$) يعني الحصول ثلاث البيدقات تحمل رقما زوجيا

$$p(X=0) = \frac{A_4^3}{A_9^3} = \frac{2}{42} = \frac{1}{21}$$

▪ ($X=1$) يعني "الحصول على بيدة واحدة تحمل رقما فرديا"

$$p(X=1) = \frac{C_3^1 \times A_4^2 \times A_5^1}{A_9^3} = \frac{15}{42}$$

▪ ($X=2$) يعني "الحصول على بيدقتين تحملان رقما فرديا"

$$p(X=2) = \frac{C_3^2 \times A_4^1 \times A_5^2}{A_9^3} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$$

▪ ($X=3$) يعني "الحصول على ثلاث بيدقات تحمل رقما فرديا"

$$p(X=3) = \frac{A_5^3}{A_9^3} = \frac{5}{42}$$

نلخص قانون احتمال المتغير العشوائي X في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{2}{42}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{5}{42}$

(3) تحديد الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي ل X

▪ الأمل الرياضي هو:

$$E(X) = \left(0 \times \frac{2}{42}\right) + \left(1 \times \frac{15}{42}\right) + \left(2 \times \frac{20}{42}\right) + \left(3 \times \frac{5}{42}\right) = \frac{5}{3}$$

▪ المغايرة هي: $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$V(X) = \left((0)^2 \times \frac{2}{42}\right) + \left((1)^2 \times \frac{15}{42}\right) + \left((2)^2 \times \frac{20}{42}\right) + \left((3)^2 \times \frac{5}{42}\right) - \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{10}{3} - \frac{25}{9} = \frac{5}{9}$$

▪ الانحراف الطرازي هو: $\sigma(Z) = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

VIII. الاختبارات المتكررة و القانون الحداني:

نعتبر تجربة عشوائية مكونة من n اختبارا بحيث هذه الاختبارات مستقلة فيما بينها،

و نتيجة كل اختبار هي تحقيق أو عدم تحقيق الحدث A (نجاح).
ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A (خلال n اختبار).

تعريف: المتغير العشوائي X يسمى متغيرا عشوائيا حدانيا وسيطا و n حيث p هو احتمال الحدث A في اختبار واحد.

خاصية: ليكن X متغيرا عشوائيا حدانيا وسيطا n و p , لدينا:

▪ قيم X هي: 0 و 1 و و n : $X(\Omega) = \{0; 1; 2; \dots; n\}$

▪ لكل k من

$$p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \{0; 1; 2; \dots; n\}$$

▪ الأمل الرياضي هو: $E(X) = np$

▪ المغايرة هي: $V(X) = np(1-p)$

مثال:

1) نعتبر الاختبار التالي:

نرمي نردا مكعبا أوجهه الستة مرقمة من 1 الى 6 ونعتبر الحدث التالي: "الحصول على عدد قابل للقسمة على 3" A

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

اذن يمكن أن يتحقق الحدث A أو لا يتحقق الحدث A

2) نكرر الاختبار أربع مرات متتالية:

اي نرمي النرد 4 مرات: عدد المرات هو: $n = 4$
ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A (خلال $n = 4$ اختبار).

المتغير العشوائي X يسمى متغيرا عشوائيا حدانيا وسيطا و $n = 4$

$$\text{حيث } p = \frac{1}{3}$$

ولدينا القاعدة التالية:

$$p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

سؤال 1: حدد قانون احتمال X .

$$p(X=0) = C_4^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 1 \times 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

$$p(X=1) = C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 4 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

$$p(X=2) = C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 6 \times \frac{1}{9} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$$

$$p(X=3) = C_4^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 4 \times \frac{1}{27} \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}$$

$$p(X=4) = C_4^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{81} = \frac{1}{81}$$

x_i	0	1	2	3	4
$p(Z=x_i)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

سؤال 2: أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ و المغايرة $V(X)$.

▪ الأمل الرياضي هو: $E(X) = np = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

▪ المغايرة هي: $V(X) = np(1-p) = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$

تمرين 20: نرمي قطعة نقدية ير مزيفة ثلاث مرات متتابة

ونعتبر الحدث التالي: "ظهور الوجه F " A

أحسب احتمال الحدث التالي:

"ظهور الوجه F مرتين بالضبط" B

الجواب: نستعمل القاعدة التالية: $n = 3$ حيث $p(A) = \frac{1}{2}$

$$p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k \in \{0; 1; 2; 3\}$$

الحل : الاختبار هو سحب كرة واحدة .

يعاد الاختبار $n = 8$ مرة .

A : " الحصول على كرة بيضاء "

B : " وقوع A $k = 6$ مرة " $P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

$$P(B) = P(X = 6) = C_8^6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{8-6}$$

$$P(B) = P(X = 6) = C_8^6 \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

X متغير عشوائي حداني وسيطاه $n = 8$ و $p = \frac{1}{4}$

$$V(X) = 8 \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} ; E(X) = 8 \times \frac{1}{4}$$

تمرين 24 : يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 2

حمراء. نسحب من الصندوق 5 كرات .

X : " المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة بمجموع الكرات البيضاء "

الحدث A : " الحصول على كرة بيضاء على الأقل "

1- حدد : $X(\Omega)$

2- احسب : $cardA$: $P(X = 2)$ في كل حالة :

أ- السحب تانيا

ب - السحب بالتتابع بإحلال

ج - السحب بالتتابع بدون إحلال

الجواب 1- : $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

2- أ- السحب تانيا : $card\Omega = C_{11}^5$

نعتبر الحدث \bar{A} : " عدم الحصول على أي كرة بيضاء "

لدينا : $card\bar{A} = C_6^5$: إذن : $cardA = C_{11}^5 - C_6^5$

$$p(X = 2) = \frac{C_5^2 \times C_6^3}{C_{11}^5}$$

ب - السحب بالتتابع بإحلال : $card\Omega = 11^5$

نعتبر الحدث \bar{A} : " عدم الحصول على أي كرة بيضاء "

لدينا : $card\bar{A} = 6^5$: إذن : $cardA = 11^5 - 6^5$

$$p(X = 2) = C_5^2 \frac{5^2 6^3}{11^5} \text{ أو } p(X = 2) = C_5^2 \left(\frac{5}{11}\right)^2 \left(\frac{6}{11}\right)^3$$

ج - السحب بالتتابع بدون إحلال : $card\Omega = A_{11}^5$

نعتبر الحدث \bar{A} : " عدم الحصول على أي كرة بيضاء "

لدينا : $card\bar{A} = A_6^5$: إذن : $cardA = A_{11}^5 - A_6^5$

$$p(X = 2) = C_5^2 \frac{A_5^2 A_6^3}{A_{11}^5}$$

تمرين 25 : يحتوي صندوق على 6 كرات سوداء و 3 حمراء .

نسحب من الصندوق كرتين بالتتابع بدون إحلال .

نعتبر : الحدث A : " الكرة الأولى سوداء "

الحدث B : " الكرة الثانية حمراء "

أ - حدد : $P(A \cap B); P(B); P(A)$

ب- هل A و B مستقلان ؟

$$p(X = 2) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

تمرين 21 : الاحتمال لكي يصيب رام الهدف هو : $\frac{2}{3}$

قام هذا الرامي ب 5 محاولات :

أحسب احتمال الحدث التالي :

" الرامي يصيب الهدف أربع مرات بالضبط B "

الجواب : نستعمل القاعدة التالية : $n = 5$ حيث $p(A) = \frac{2}{3}$

$$p(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$p(X = 4) = C_5^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 5 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 5 \left(\frac{16}{243}\right) = \frac{80}{243}$$

تمرين 22 : نرمي قطعة نقدية 3 مرات متتالية

X : " المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة بعدد المرات الذي

يظهر فيها الوجه P "

1- حدد $card\Omega$ ؛ $X(\Omega)$

2- حدد قانون احتمال X

3- احسب : $\sigma(X); V(X); E(X)$

الحل 1- : $card\Omega = 2^3 = 8$

$$\Omega = \{FFF; FFP; FPF; PFF; FPP; PFP; PPF; PPP\}$$

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$$

2- $(X = 0) = \{FFF\}$: إذن : $P(X = 0) = \frac{1}{8}$

$$(X = 1) = \{FFP; FPF; PFF\}$$

$$\text{إذن : } P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

نجد : $P(X = 2) = \frac{3}{8}$ ؛ $P(X = 3) = \frac{1}{8}$

$X(\Omega)$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2} \quad -3$$

$$V(X) = \frac{1}{8} \times \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \times \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 +$$

$$\frac{3}{8} \times \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \times \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{3}}{2} ; V(X) = \frac{3}{4}$$

تمرين 23 : يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 12 سوداء و 3

حمراء .

نسحب 8 كرات بالتتابع بإحلال

نعتبر الحدث B : " الحصول على 6 كرات بيضاء بالضبط "

احسب : $P(B)$

نعتبر : X : " عدد المرات التي تكون فيها الكرة بيضاء "

احسب : $V(X)$ ؛ $E(X)$ ؛ $P(X = 6)$

ج- احسب : $P(\bar{A} \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P_B(A)$

الأجوبة:

أ - $card\Omega = 9 \times 8 = 72$

الحدث A : NX (سوداء أو حمراء)

$card(A) = 6 \times 8 = 48$

$p(A) = \frac{2}{3}$

$p(A) = \frac{48}{72} = \frac{2}{3}$ أو مباشرة

الحدث B : NR أو RR

$card(B) = 3 \times 2 + 6 \times 3 = 24$

$p(B) = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$ أو مباشرة $p(B) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{6}{9} \times \frac{3}{8}$

إذن: $p(B) = \frac{1}{3}$

الحدث $A \cap B$: "الأولى سوداء و الثانية حمراء" NR

إذن: $P(A \cap B) = \frac{6 \times 3}{9 \times 8}$ و منه: $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

نعلم أن: $P_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ إذن: $P_A(B) = \frac{3}{8}$

ب- A و B غير مستقلان

لأن: $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

أو لأن: $p_A(B) \neq p(B)$

ج- نعلم أن: $P_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ إذن: $P_B(A) = \frac{3}{4}$

نعلم أن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

إذن: $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

نعلم أن: $P(\bar{A} \cap B) = P(B - A)$

و: $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

إذن: $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

و منه: $P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{12}$

تمرين 26: (امتحان 2009): يحتوي صندوق على 3 كرات

بيضاء و 5 كرات حمراء

نسحب عشوائيا كرتين من الصندوق في آن واحد و نفترض أن جميع الكرات لها نفس الاحتمال لكي تسحب.

(1) نعتبر الحدثين التاليين: " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون " A

" الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون مثنى مثنى " B

بين أن: $p(A) = \frac{3}{44}$ و $p(B) = \frac{3}{11}$

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة لثلاث كرات **بعدد** الألوان التي تحملها

(أ) حدد قانون احتمال X .

(ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$

تمارين للبحث

تمرين 1: يحتوي صندوق على:

3 أقراص تحمل الأرقام 1, 1, 2

4 أقراص تحمل الأرقام 1, 1, 2, 2

5 أقراص تحمل الأرقام 1, 2, 2, 2, 3

نسحب عشوائيا قرصين من الصندوق في آن واحد و نفترض أن جميع الأقراص لها نفس الاحتمال لكي تسحب.

(1) نعتبر الأحداث التالية: " سحب قرصين من نفس اللون " A

" الحصول على قرص واحد أخضر فقط " B و " الحصول

على قرصين يحملان نفس الرقم " C

(a) حدد احتمال الأحداث A و B و C

(b) هل الحدثان A و B مستقلان؟

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة ممكنة لقرصين بمجموع الرقمين المسجلين عليهما

(a) حدد القيم الذي يأخذها المتغير العشوائي X و حدد قانون احتمال X .

(b) أحسب $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(x)$

تمرين 2: يتكون المكتب الإداري لإحدى الجمعيات من سبعة رجال

و ثلاث نساء , أربعة من بين الرجال وامرأتان سنهم ثلاثون سنة فما فوق

نختار عشوائيا في آن واحد ثلاثة أفراد من هذا المكتب لتمثيل الجمعية في مهمة .

(1) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الأفراد الذي سنهم ثلاثون سنة فما فوق من بين الأفراد الثلاثة المختارين

حدد القيم الذي يأخذها المتغير العشوائي X و حدد قانون احتمال X .

(2) نعتبر الحدثين التاليين: " اختيار رجلين و امرأة " A و " اختيار ثلاثة أشخاص

سنهم أقل من ثلاثين سنة " B

(a) حدد احتمال الحدثين A و B

(b) هل الحدثان A و B مستقلان؟

تمرين 3: نعتبر نردا مكعبا أوجهه الستة تحمل على التوالي الأعداد: -

2, 2, 1, 1, 1, 1

و نفترض أن الأوجه الستة متساوية احتمال

(1) نرمي هذا النرد مرة واحدة و نعتبر و نعتبر العدد الذي يعينه النرد عندما يستقر

نعتبر الحدثين التاليين: " ظهور عدد نسبي زوجي " A و

" ظهور عدد موجب " B

حدد احتمال الحدثين A و B

(a) هل الحدثان A و B مستقلان؟

(2) رمينا هذا النرد ثلاث مرات متتالية , وليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد المرات التي يعين فيه النرد عددا نسبيا زوجيا

(a) حدد القيم الذي يأخذها المتغير العشوائي X و حدد قانون احتمال X .

(b) أحسب $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(x)$

(c) حدد احتمال الحدث التالي:

" ظهور مرتين على الأكثر عدد نسبي زوجي " C
تمرين 4: يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق :

3. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

4. حدد احتمال الأحداث التالية : " سحب كرتين بيضاوين " B

" سحب كرتين سوداوين " N

" سحب كرتين من نفس اللون " M

" سحب كرتين من لون مختلف " D

" سحب كرة واحدة بيضاء من لون مختلف " D

تمرين 5: يحتوي صندوق غير كاشف على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء نسحب عشوائيا بالتتابع وبإحلال كرتين من الصندوق :

3. حدد $card(\Omega)$ حيث Ω هو فضاء الإمكانيات

4. حدد احتمال الأحداث التالية : " سحب كرتين بيضاوين " B

" سحب كرتين سوداوين " N

" سحب كرتين من نفس اللون " M

" سحب كرتين من لون مختلف " D

" سحب كرة واحدة بيضاء " B

تمرين 6: يتكون قسم من 4 إناث و 8 ذكور نختار عشوائيا في آن واحد تلميذين لتمثيل القسم في الأنشطة داخل الثانوية

1. حدد $card(\Omega)$ عدد الاختيارات الممكنة

2. حدد احتمال الأحداث التالية :

« اختيار تلميذين ذكرين " B

" اختيار تلميذتين " N

" اختيار تلميذين من جنس مختلف " D

" اختيار تلميذين من نفس الجنس " M

" اختيار على الأقل تلميذة " F

تمرين 7 : A و B مجموعتين بحيث : $P(A) = \frac{4}{7}$ و $P(B) = \frac{2}{7}$

و $P(A \cup B) = \frac{6}{7}$

أحسب $P(A \cap B)$ و $P(\bar{A})$